



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



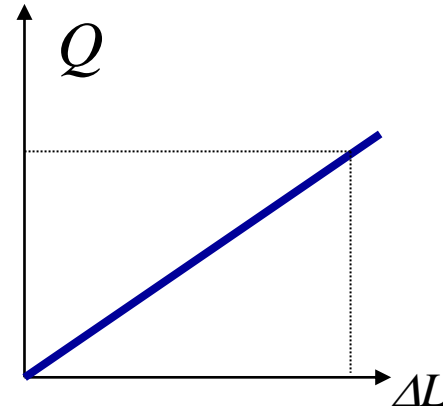
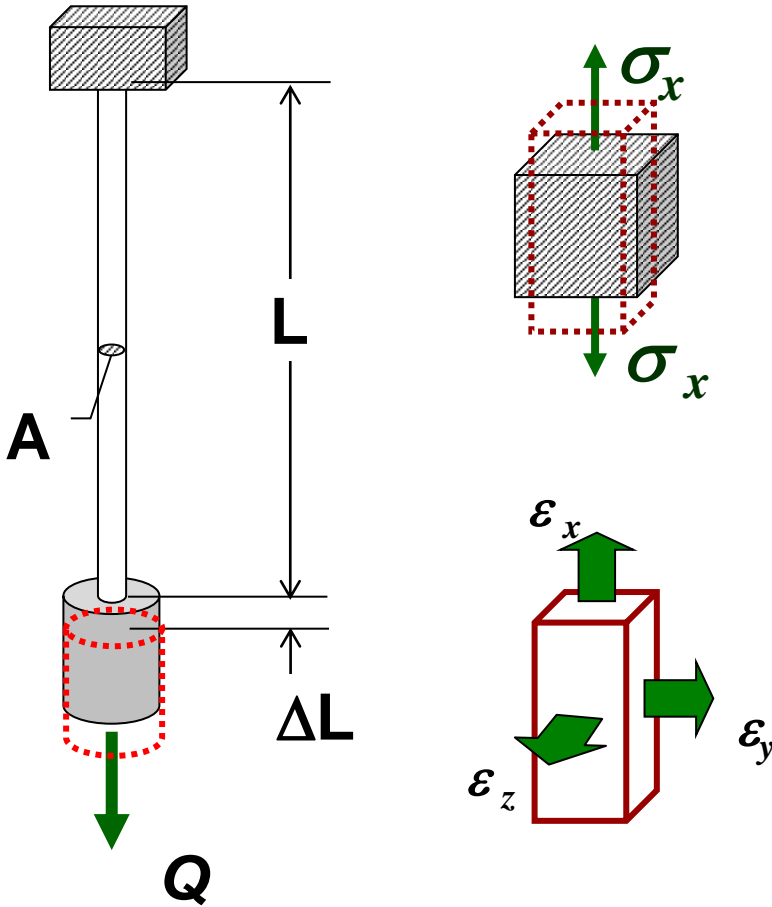
Wykład 4

Prawa konstytutywne

Uogólnione prawo Hooke'a

Prawo Hooke'a

Metalowy pręt o długości L i polu przekroju poprzecznego A , obciążony siłą Q pochodzącą od ciężarka zawieszono na jego końcu, doznaje wydłużenia o ΔL



$$\Delta L \sim \frac{Q \cdot L}{A}$$

$$\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{Q}{A}$$



$$\varepsilon_x \sim \sigma_x$$



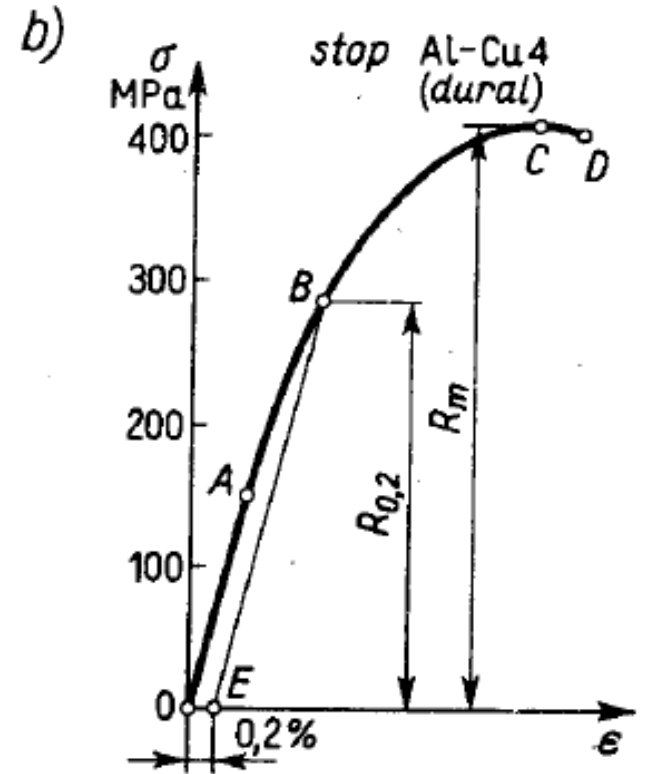
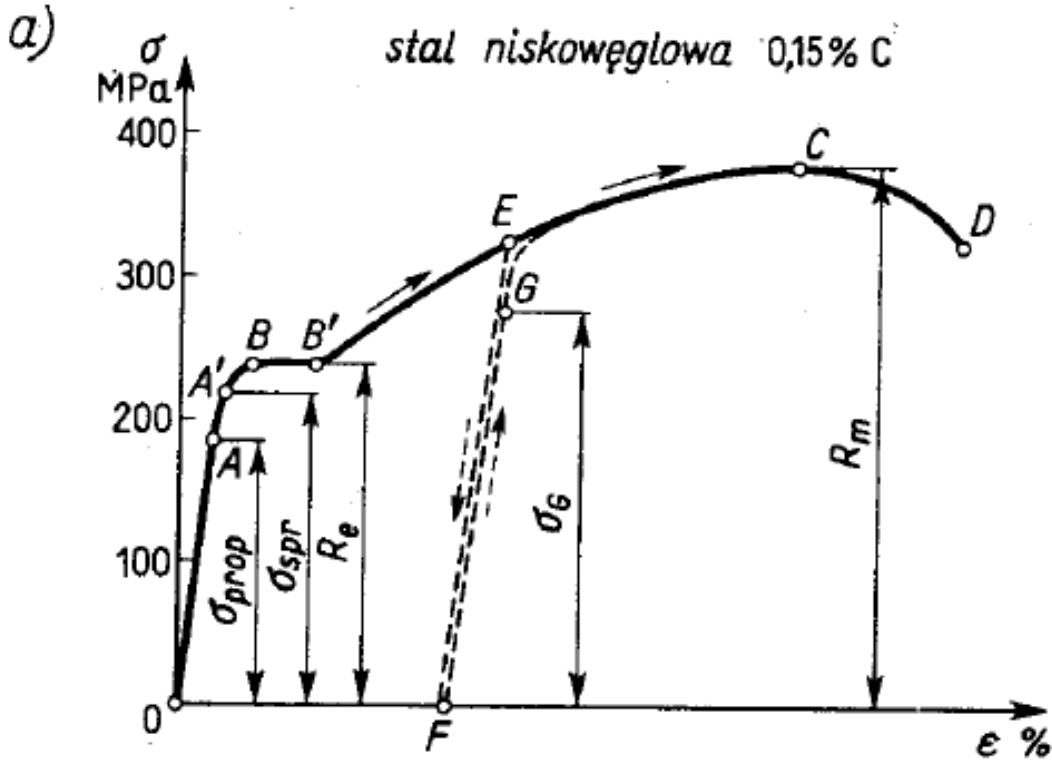
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

E - moduł Younga
 ν - stała Poissona

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x =$$

$$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Typowe wykresy rozciągania



E – moduł Younga

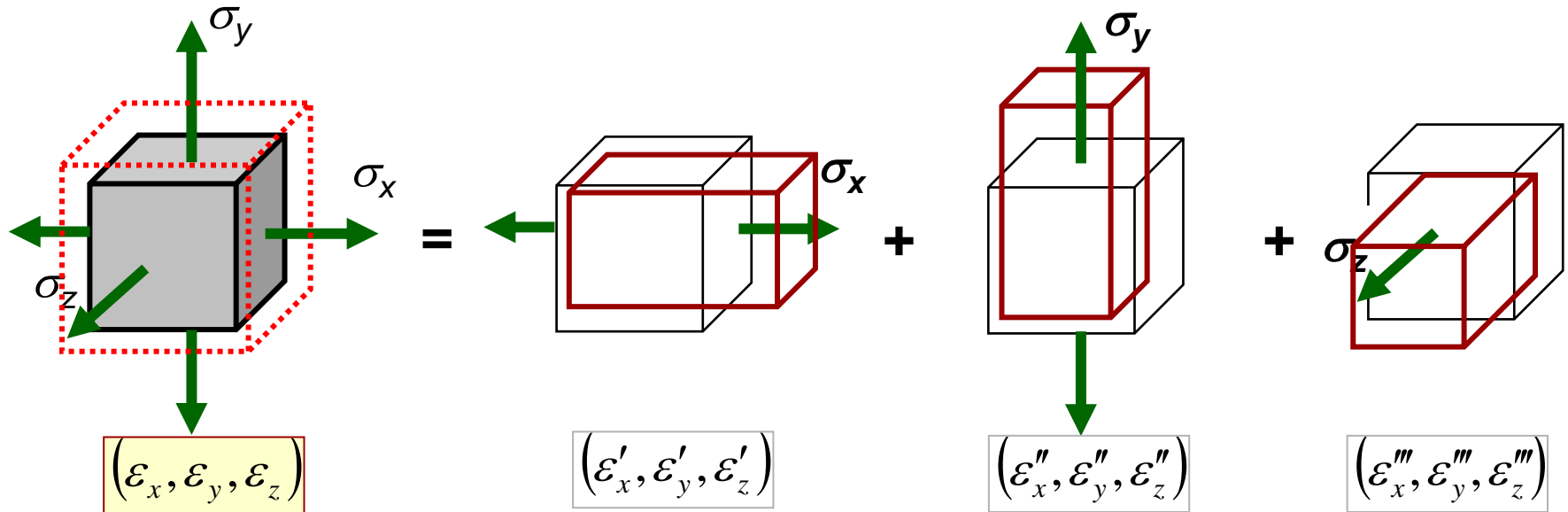
σ_{spr} – granica sprężystości

R_e – granica plastyczności

R_m – granica wytrzymałości doraźnej

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów prostego rozciągania



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon'_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon'_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

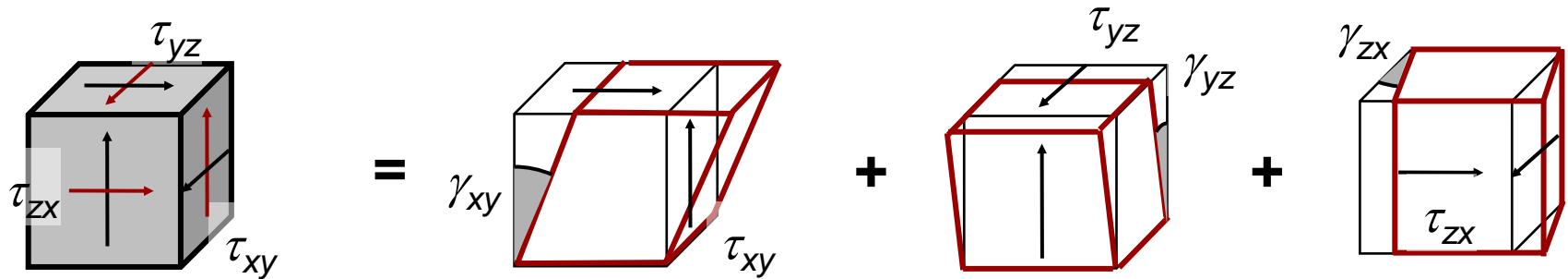
$$\varepsilon'''_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Efektom działania naprężeń normalnych jest stan odkształceń liniowych

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów ścinania kolejno w trzech płaszczyznach



Efektom działania naprężeń tnących jest stan odkształceń postaciowych

$$(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$(\gamma_{xy}, 0, 0)$$

$$(0, \gamma_{yz}, 0)$$

$$(0, 0, \gamma_{zx})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

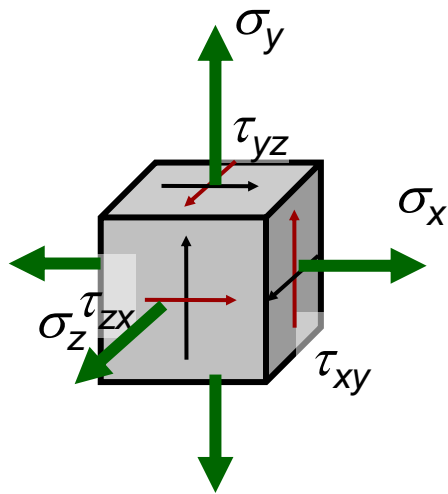
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

G - moduł Kirchhoffa

Uogólnione prawo Hooke'a

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym



Dla materiałów izotropowych:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

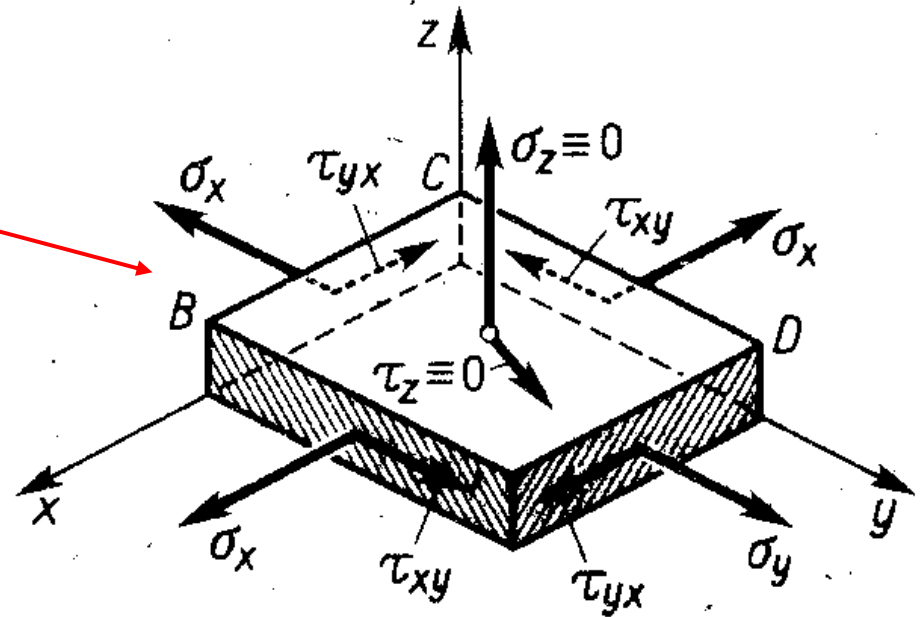
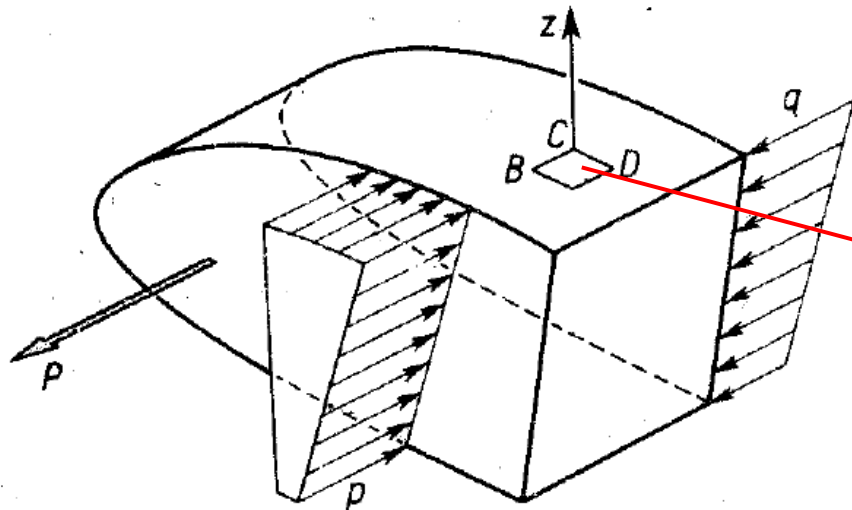
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

E - moduł Younga
ν - stała Poissona
G - moduł Kirchhoffa

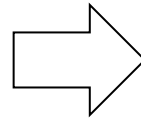
Material	<i>E</i> MPa	<i>ν</i>
stal ⁽²⁾ St 3 S (~0,18% C, ~0,5% Mn)	2,06 · 10 ⁵	0,29
stal sprężynowa ⁽³⁾ 60 SGH	2,08 · 10 ⁵	0,30
stop Al-Cu (dural D 16)	7,0 · 10 ⁴	0,34

Stan naprężenia na swobodnej powierzchni ciała



Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

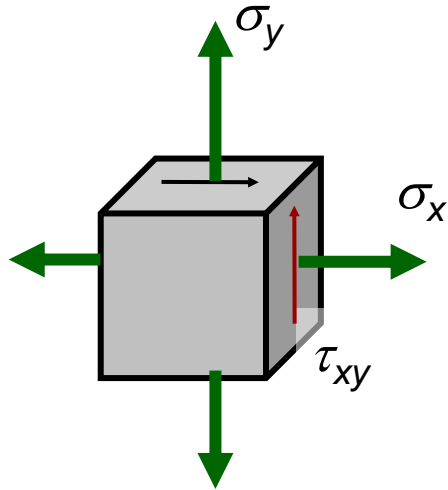
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \mathbf{0})) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\mathbf{0} + \sigma_x)) & \gamma_{yz} &= \frac{\mathbf{0}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\mathbf{0} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) & \gamma_{zx} &= \frac{\mathbf{0}}{G} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) & \gamma_{yz} &= \mathbf{0} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{zx} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Prawo Hooke'a dla przypadku PSN

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

E - moduł Younga
 ν - stała Poissona
 G - moduł Kirchhoffa

Dla materiałów izotropowych:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

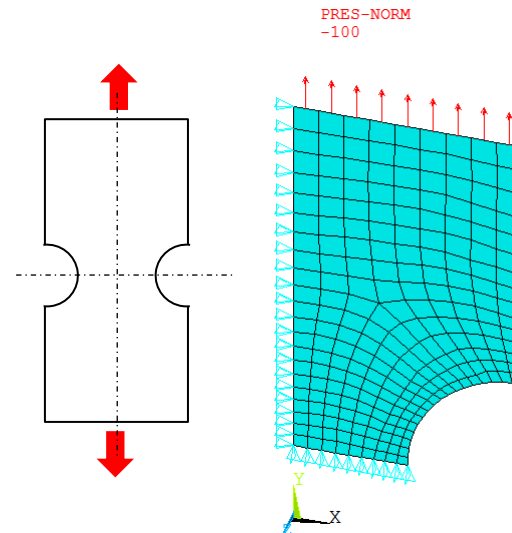
Płaski Stan Naprężenia

Po przekształceniu mamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$



Moduł ścisłości

Rozważmy prawo Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))\end{aligned}$$

Gdy dodamy do siebie te trzy równania:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(1 - 2\nu) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E}(1 - 2\nu) \cdot 3 \cdot \sigma_0$$

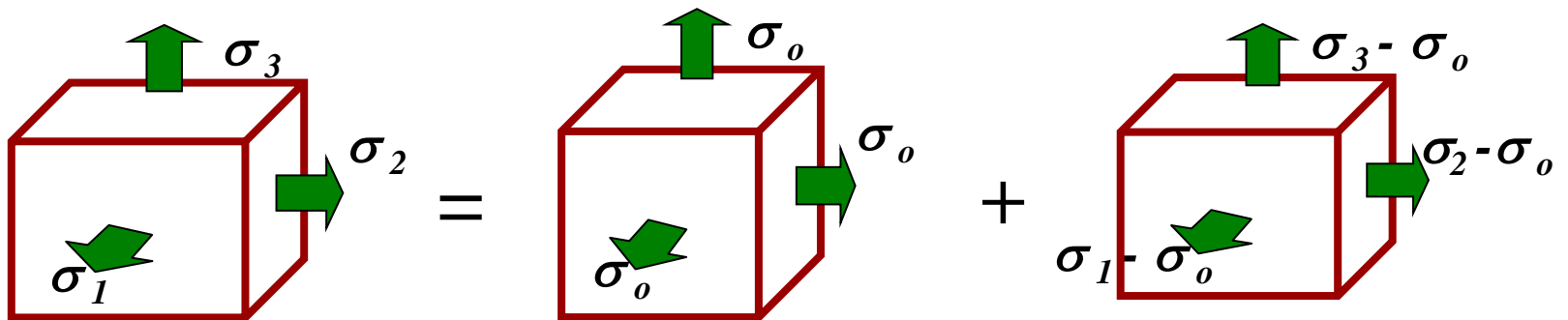
$$\sigma_0 = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \cdot e$$

Względna zmiana objętości

Naprężenia średnie

Moduł ścisłości **K**

Stan naprężenia można przedstawić jako superpozycję:



$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Całe odkształcenie objętościowe

$$e = 0$$

Tylko odkształcenie postaciowe

Moduł ściśliwości

$$\sigma_0 = \frac{E}{3(1-2\nu)} \cdot e$$

Moduł ściśliwości **K**

Dla stali: $E=2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu=0,3$

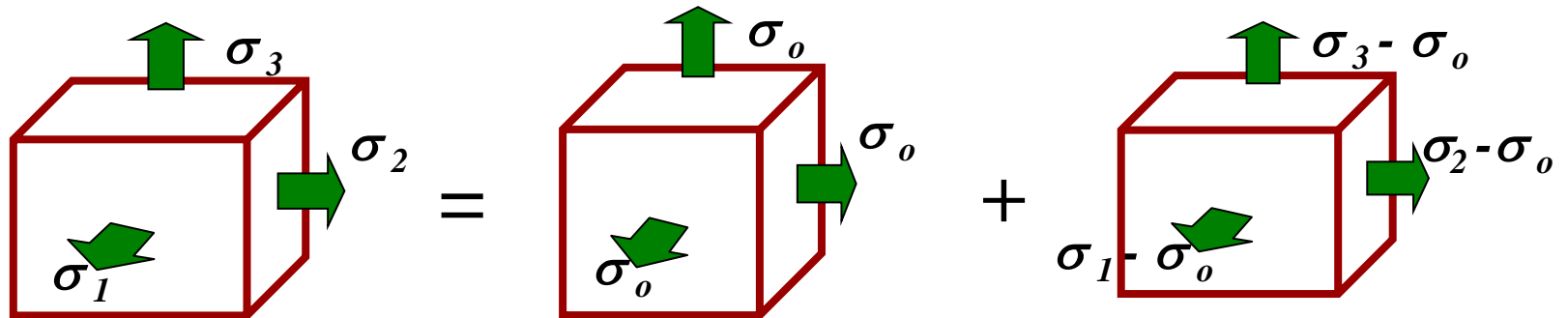
$$K = \frac{E}{3(1-2 \cdot 0,3)} = \frac{E}{1,2}$$

Dla gumy: $E=2 \div 8$ MPa, $\nu=0,47$

$$K = \frac{E}{3(1-2 \cdot 0,47)} = \frac{E}{0,18}$$

Guma łatwo się poddaje zmianom postaci, ale trudniej zmianom objętości !

Stan naprężenia można przedstawić jako superpozycję:



$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Całe
odkształcenie
objętościowe

$$e = 0$$

Tylko
odkształcenie
postaciowe